

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediția a IX-a
Galați, 01 noiembrie 2008

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Fie (G, \bullet) un grup. Determinați funcțiile $f : G \rightarrow G$ cu proprietatea:

$$f(x \bullet y) = x \bullet f(f(y)), \forall x, y \in G.$$

b) Determinați morfismele f ale grupului $(\mathbb{Z}_{59}^*, \cdot)$ cu proprietatea $f(\hat{2}) = \hat{2}$.

Prelucrare Constantin Ursu

Problema 2.

a) Să se calculeze $\int \frac{x^{2009}}{1+x^{2680}} dx$, unde $x \in (0, \infty)$.

Constantin Ursu, profesor, Galați

b) Să se determine funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dacă: $\frac{f(x)}{x}$ este o primitivă pentru g , iar

$\frac{g(x)}{x}$ este o primitivă pentru f .

Laurențiu Panaitopol, București

Problema 3.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n-1}}{n^{n-2}} \geq a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3 \text{ și } a_i \in (0, \infty); i = \overline{1, n}.$$

Vasile Popa, profesor, Galați

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.

Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.

Timp de lucru : 3 ore